Hajdú–Bihar megyei középiskolások matematika versenye, 2019/2020
– 9. évfolyam, megoldókulcs –

---

1. feladat

A teljes táv 1000 méter. Amikor a győztes áthalad a célon, Karcsi 100 méterrel van mögötte,

1 pont

tehát 900 métert tett meg.

2 pont

Ákos pedig $1000 - 145 = 855$ métert.

1 pont

Ha Karcsi megteszi még eddigi útja $\frac{1}{9}$-ét, akkor $900 + \frac{900}{9} = 900 + 100 = 1000$ métert tesz meg, így beér a célba.

4 pont

Ákos ezalatt ugyanúgy megteszi eddigi útja $\frac{1}{9}$-ét.

1 pont

Ezért $855 + \frac{855}{9} = 855 + 95 = 950$ méternél tart.

2 pont

Így $1000 - 950 = 50$ méterrel lesz a célba érkező Karcsi mögött.

1 pont

Összesen: 12 pont

2. feladat

Mivel a zsebszámológép kijelzőjén három darab 4-es számjegy jelent meg és 5-jegyű számokat írt be Pisti, ezért a következő 4 helyre, ezeket jelöltük $?$-lel, $?4?4?4?$, írhatott be számokat. A 0-át és az 1-es számjegyet nem tudja kijelezni az elromlott zsebszámológép ezért ezeket írhatta a $?$ helyére.

1 pont

1) A számjegyek amit Pisti beírt egymás mellé kerülnek: Az 11, 10 számot a $?$-el jelölt 4 hely közül egyet kiválasztva írhatta, ez $4 + 4$ lehetőség. A lehetséges számok pedig: 11444, 41144, 44114, 44411, 10444, 41044, 44104, 44410.

2 pont

A 01-t és a 00-t nem írhatta az első $?$ helyére, mert akkor nem kapnánk ötjegyű számot. Ezért a megmaradt 3 darab $?$ helyére írhatta úgy, hogy ezen három hely közül kiválasztott egyet. Ezt $3 + 3$-féleképpen teheti meg: A lehetséges számok: 40044, 44004, 44400, 40144, 44014, 44401.

3 pont

2) A számjegyek amit Pisti beírt nem egymás mellé kerülnek: Ekkor az első számjegy vagy 1-es vagy 4-es (0 nem lehet).

Ha az első számjegy 1-es, akkor a $14?4?4?$-ben levő $?$ közül egyet kiválasztva írhatunk 0 vagy 1 számjegyet. Ez $3 \cdot 2 = 6$ lehetőség. A lehetséges számok: 14144, 14044, 14414, 14404, 14441, 14440.

2 pont

Ha az első számjegy 4-es, akkor a $4?4?4?$-ben levő $?$ közül kettőt kiválasztva írhatunk mindkét kiválasztott helyre 1-t, mindkét kiválasztott helyre 0-t vagy egyikre 1-t a másikra 0-s számjegyet. Ha az egyikre 1-t a másikra 0-s számjegyet írunk akkor számít a sorrend. Ez $3 \cdot 4 = 12$ lehetőség. A lehetséges számok: 41414, 44141, 41441, 40404, 44040, 40440, 41404, 44140, 41440, 40414, 44041, 40441.

3 pont

A felsorolt 32 ötjegyű szám közül kerülhetett ki a Pisti által beírt szám.

1 pont

Összesen: 12 pont

3. feladat

Mivel

$$4^{2019} - 2019^4 = (2^{2019})^2 - (2019^2)^2 =$$

3 pont

$$(2^{2019} - 2019^2)(2^{2019} + 2019^2)$$

2 pont

ezért $4^{2019} - 2019^4$ két, 1-nél nagyobb egész szám szorzata, tehát összetett szám.

1 pont

Mivel

$$4^{2019} + 2019^4 = (2^{2019})^2 + (2019^2)^2 = (2^{2019} + 2019^2)^2 - 2 \cdot 2^{2019} \cdot 2019^2 =$$

3 pont

$$= (2^{2019} + 2019^2)^2 - 2^{2020} \cdot 2019^2 = (2^{2019} + 2019^2)^2 - (2^{1010} \cdot 2019)^2 =$$

2 pont

$$(2^{2019} + 2019^2 - 2^{1010} \cdot 2019)(2^{2019} + 2019^2 + 2^{1010} \cdot 2019)$$

ismét két 1-nél nagyobb egész szám szorzata, tehát összetett szám.

1 pont

Összesen: 12 pont

4. feladat

Készítsünk ábrát! Tükrözzük a C csúcsot az AD szögfelezőre, megkapjuk az E pontot az AB szakaszon. Így ADC háromszög egybevágó a tükrözéssel során ADE háromszöggel, mert AD oldaluk közös és a rajta felvő szögek megegyeznek.

3 pont

Vegyük fel F pontot az AB szakaszon úgy, hogy $BDF\angle = 40°$. A BFD háromszög egyenlő szárú, mert $FBD\angle = 40° = BDF\angle$.

4 pont

A szögek kiszámolásával látható, hogy az EDF és a DAF háromszögek is egyenlő szárúak.

3 pont

Ezért $DC = DE = DF = FB$, $AD = AF$, $AD + DC = AF + FB = AB$.

2 pont

Összesen: 12 pont

5. feladat

Legyen a kezdetben érkezett mikrobuszok száma: m, a kocsik száma pedig: k.

1 pont

Az első átrendezéskor minden járműből 1-1 gyerek szállt ki és átült az érkező három jármű egyikébe.

1 pont

A három új járműbe attól függően, hogy 3, 2, 1 vagy 0 darab kisbusz volt közöttük 33, 28, 23, 18 diák ült be.

2 pont

Így $m + k \in \{33, 28, 23, 18\}$.

1 pont

További jármű érkezése esetén minden eredeti járműből és a három később érkezettből is egy-egy diák szállna ki.

1 pont

Így $m + k + 3 = 10m_2 + 5k_2$, ahol m_2 jelenti a szükséges mikrobuszok és k_2 a szükséges autók számát.

3 pont

A felírt egyenlet jobb oldala osztható 5-tel, míg a bal oldal egyik esetben sem.

2 pont

Nem lehet megoldani újabb járművek érkezésével.

1 pont

Összesen: 12 pont