Hajdú-Bihar megyei középiskolások matematika versenye, 2019/2020

– 12. évfolyam, megoldókulcs –

---

1. feladat

a) A kiválasztott 8 alkatrész között $\binom{8}{0}\cdot 0{,}97^8\cdot 0{,}03^0 \approx 0{,}7837$ valószínűséggel nincs hibás.

3 pont

b) $\binom{8}{1}\cdot 0{,}97^7\cdot 0{,}03^1$ valószínűséggel van köztük pontosan egy hibás. 4 pont

Így annak valószínűsége, hogy legalább két hibás van a véletlenszerűen kiválasztott 8 alkatrész között: 1 - $\binom{8}{0}\cdot 0{,}97^8\cdot 0{,}03^0$ - $\binom{8}{1}\cdot 0{,}97^7\cdot 0{,}03^1 \approx 0{,}02234$. 5 pont

Összesen: 12 pont

2. feladat

a) Az egyes sorokban rendre 1, 2 ,3,…. *n* darab szám van. A sorok elején levő számok közti különbség rendre 2-vel nő, az *n*-edik sor elején az 1 + 2 + 4 + 6 +…. + 2 (*n*-1) =

$= 1 + \frac{(2+2(n-1))(n-1))}{2} = n^2 - n + 1$ szám van. 3 pont

Az *n*-edik sorban álló *n* darab szám 2 differenciájú számtani sorozatot alkot, így a sor végén az elején álló számnál 2(*n*-1)-gyel nagyobb szám van, azaz $n^2 + n - 1$.

2 pont

b) Az *n*-edik sorban levő *n* darab szám összege: $S_n = \frac{\left[(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)\right]}{2} n = n^3$. 3 pont

c) Azt kell megadnunk, hogy melyik sorban szerepel a 2019, azaz melyik az a legkisebb *n*, amelyre 2019 ≤ $n^2 + n - 1$.

Ezt megkaphatjuk becsléssel is: 44^2 + 44 - 1 = 1979, 45^2 + 45 – 1 = 2069 miatt 2019 a 45. sorban található. A 45. sor számainak összege: 45^3 = 91125. 4 pont

Összesen: 12 pont

3. feladat

a) Ha $x, y \geq 0$, akkor $2(x + y) \leq x + y$, így az egyenlőtlenség egyetlen megoldása $x = y = 0$.

1 pont

b) Ha x ≥ 0 és y < 0 , akkor 2 |x+ y |≤ x –y .

Négyzetre emeléssel, ami most ekvivalens átalakítás, kapjuk, hogy

$4(x^2 + 2xy + y^2) \leq x^2 - 2xy + y^2$, $3x^2 + 10xy + 3y^2 \leq 0$. 2 pont

Vezessük be a $t = \frac{x}{y}$ jelölést (y≠0). Ekkor $3t^2 + 10t + 3 \leq 0$. A $3t^2 + 10t + 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei: $t_1 = -\frac{1}{3}, t_2 = -3$.

Az egyenlőtlenséget a $-3 \leq t \leq -\frac{1}{3}$. és $y < 0$ miatt a $-3x \leq y \leq -\frac{1}{3}x$ értékek elégítik ki.

3 pont

c) Hasonlóan kapjuk hogy $x < 0$ és $y \geq 0$ esetén a megoldás $-3y \leq x \leq -\frac{1}{3}y$, vagyis $-\frac{1}{3}x \leq y \leq -3x$.

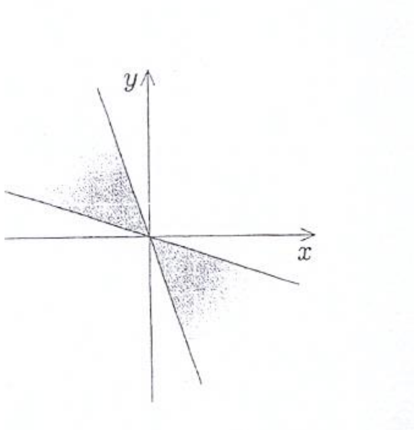
3 pont

d) Ha $x < 0$ és $y < 0$, akkor a feltétel $-2(x+y) \leq -(x+y)$, azaz $0 \leq x + y$, ami lehetetlen. 1pont

Összefoglalva A feladat megoldása $x \geq 0$, $y < 0$ esetén $-3x \leq y \leq -\frac{1}{3}x$, $x < 0$, $y \geq 0$ esetén $-\frac{1}{3}x \leq y \leq -3x$ és az $x = y = 0$.

A pontokat a koordinátarendszerben ábrázolva az $y = -\frac{1}{3}x$ és az $y = -3x$ függvények grafikonjai által határolt két hegyesszögű szögtartomány pontjai a megfelelőek.
.

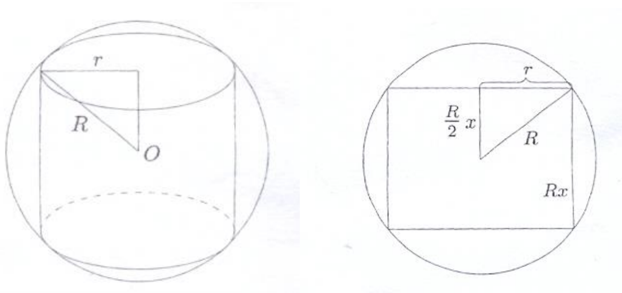
2 pont



Összesen: 12 pont

4. feladat

Ábrát készítünk.



A henger síkmetszetére felírjuk Pithagórász tételét.

$R^2 = \frac{R^2}{4}x^2 + r^2$ (x > 0).

1 pont

Innen $4r^2 = R^2(4 - x^2)$, $r^2 = \frac{R^2(4 - x^2)}{4}$.

2 pont

A térfogatok aránya: $\dfrac{V_{henger}}{V_{gömb}} = \dfrac{\frac{1}{4}R^2(4-x^2)Rx\pi}{\frac{4R^3\pi}{3}} = \dfrac{3}{16}(4x - x^3)$. 3 pont

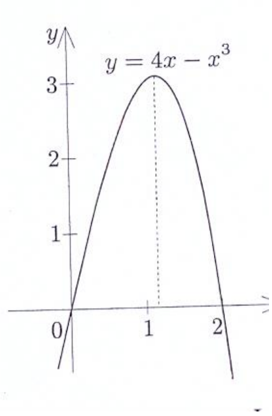
Az $f(x) = 4x\text{-}x^3$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0, vagyis ha

$f'(x) = 4 - 3x^2 = 0$, azaz $x = \sqrt{\dfrac{4}{3}} \approx 1{,}1547$. 3 pont

Valóban, ha $x = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$, akkor az $f(x)$ függvénynek maximuma van.

Ezt a második derivált vizsgálatával, vagy a függvény ábrázolásával mutathatjuk meg.

3 pont



Összesen: 12 pont

5. feladat

A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát átalakítjuk, felhasználva a sin $(90^o + \alpha) = \cos \alpha$,
sin $(180^o - \alpha.) = \sin \alpha$ összefüggéseket .
sin $93^o = \cos 3^o$, sin $111^o = \cos 21^o$, sin$129^o = \cos 39^o$, sin $147^o = \cos 57^o$, sin$165^o = \cos 75^o$.

$\sin 3^o \cdot \sin 21^o \cdot \sin 39^o \cdot \sin 57^o \cdot \sin 75^o \cdot \sin 93^o \cdot \sin 111^o \cdot \sin 129^o \cdot \sin 147^o \cdot \sin 165^o =$
$= \sin 3^o \cdot \cos 3^o \cdot \sin 21^o \cdot \cos 21^o \cdot \sin 39^o \cdot \cos 39^o \cdot \sin 57^o \cdot \cos 57^o \cdot \sin 75^o \cdot \cos 75^o$.

4 pont

Figyelembe vesszük, hogy $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \dfrac{1}{2}$. $\sin 2\alpha$ és $\sin(90^o \mp \alpha) = \cos\alpha$. 2 pont

Így $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \sin 6^0 \sin 42^0 \sin 78^0 \sin 66^0 \sin 30^0 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 \dfrac{2\sin 6^0 \cos 6^0}{2\cos 6^0} \cos 12^0 \cos 24^0 \cos 48^0 =$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^8 \dfrac{\sin 24^0 \cos 24^0 \cos 48^0}{\cos 6^0} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 \dfrac{\sin 48^0 \cos 48^0}{\cos 6^0} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 \dfrac{\sin 96^0}{2\cdot\cos 6^0} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} \dfrac{\cos 6^0}{\cos 6^0} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$

,amit bizonyítanunk kellett. 6 pont

Összesen: 12 pont